

۱۴-۲ آزمایش‌های تصادفی و فضای نمونه‌ای

در علم احتمال، به عملی که برای جمع‌آوری داده‌ها صورت می‌پذیرد، «آزمایش» گفته می‌شود و اگر نتیجه‌ی این آزمایش را از پیش نتوان به‌طور قطع معین کرد، آن را «آزمایش تصادفی» می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، «فضای نمونه‌ای» آن نامیده می‌شود که به‌طور معمول آن را با حرف S نمایش می‌دهند و تعداد عناصر فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نشان می‌دهند. فضای نمونه‌ای بر دو نوع است:

(۱) اگر فضای نمونه‌ای شامل تعدادی عناصر محدود یا تعداد عناصر از لحاظ شمارش نامحدود باشد، آن را «فضای نمونه‌ای گسسته» می‌نامند.

(۲) اگر فضای نمونه‌ای شامل مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بین دو حد مشخص باشد، آن را «فضای نمونه‌ای پیوسته» می‌نامند.

نکته ۲۷ به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی یک «برآمد» گفته می‌شود. برآمد را با حرف « ω » نشان می‌دهند.

مثال ۶۷ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس چنین است:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

این فضای نمونه، گسسته و محدود است.

شیر
خط

مثال ۶۸ فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه تا وقوع رویه‌ی شیر، چنین است:

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \dots\}$$

این فضای نمونه، گسسته و نامحدود است. زیرا در این‌جا آزمایش تکرار می‌شود تا برای اولین بار رویه‌ی شیر بیاید که ممکن است در اولین بار بیاید یا در دومین بار بیاید یا هیچ‌گاه رویه‌ی شیر نیاید.

مثال ۶۹ فضای نمونه برای لامپ که حداکثر عمر آن ۲۰۰۰ ساعت است، چنین است:

$$S = \{x : 0 \leq x \leq 2000\}$$

این فضای نمونه‌ی پیوسته است، زیرا تعداد نامتناهی زمان ممکن برای عمر لامپ وجود دارد که نمی‌توان تک‌تک آن‌ها را مشخص کرد.

مثال ۷۰ دو تاس به همراه سکه‌ای پرتاب می‌شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟ حل.

$$n(S) = 6^2 \times 2^1 = 36 \times 2 = 72$$

مثال ۷۸ اگر بخواهیم ۱۲ توپ را درون ۲۰ جعبه قرار دهیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟ حل.

$$n(S) = \underbrace{20 \times 20 \times \dots \times 20}_{12 \text{ بار}} = 20^{12}$$

۲-۱۵ حادثه یا پیشامد

گفتیم که فضای نمونه‌ای یک مجموعه است. بنابراین، زیرمجموعه‌هایی می‌تواند داشته باشد. به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، یک «پیشامد» یا «حادثه» گفته می‌شود. به‌طور معمول، پیشامدها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A, B, C و ... نشان می‌دهیم. اگر A یک پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشد:

$$A \subset S$$

انواع پیشامدها چنین‌اند:

- (۱) پیشامد ساده: پیشامدی است که فقط یک عضو دارد. مانند آمدن عدد ۳، در پرتاب یک تاس: $\{3\}$.
- (۲) پیشامد مرکب: پیشامدی است که بیش از یک عضو دارد. مانند وقوع یک شیر، در پرتاب دو سکه: $\{HT, TH\}$.
- (۳) پیشامد غیرممکن (نشدنی): پیشامدی است که عضو نداشته باشد. مانند آمدن عدد ۷، در پرتاب یک تاس: $\{\}$.
- (۴) پیشامد حتمی (یقین): پیشامدی است که دارای تمام اعضای فضای نمونه است. مانند: وقوع شیر یا خط در پرتاب یک سکه: $\{H, T\}$.
- (۵) پیشامد تضادفی: پیشامدی است که می‌تواند رخ دهد و هم چنین می‌تواند رخ ندهد. مانند آمدن عدد ۵ در پرتاب یک تاس.



اگر S یک فضای نمونه‌ای محدود باشد، و شانس وقوع همه‌ی عضوهای S برابر باشد، احتمال وقوع هر پیشامد مانند A از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}$$

یا در برخی از کتاب‌ها به صورت زیر است:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای پیشامد } A}{\text{تعداد حالات ممکن}}$$

فضای نمونه

در حل مسایل احتمال، ابتدا مجموعه‌ی همه‌ی برآمدهای ممکن یک آزمایش تصادفی را می‌یابیم، سپس پیشامدی که احتمال آن خواسته شده است را به صورت زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای معین می‌کنیم، در نهایت احتمال آن پیشامد را به کمک قوانین احتمال به دست می‌آوریم.

نکته ۲۹ تابع احتمال P که با ضابطه‌ی فوق تعریف شود، دارای خواص زیر است:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۱)$$

$$P(S) = 1 \quad (۲)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (۳)$$

مثال ۷۳ سکه‌ی نازاری را ۴ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال ظاهر شدن به طور دقیق ۳ شیر در این چهار پرتاب چقدر است؟ حل.

$$n(S) = 2^4 = 16, \quad n(A) = \frac{4!}{3!1!} = 4, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

مثال ۷۴ کیسه‌ای محتوی ۷ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است. اگر دو مهره از کیسه بیرون بیاوریم، احتمال این که هر دو مهره سیاه باشند، چقدر است؟ حل.

$$n(S) = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = 66, \quad n(A) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

مثال ۷۵ دو تاس را هم زمان پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع اعداد رو شده حداقل ۱۰ باشد، چقدر است؟
حل.

$$n(S) = 6^2 = 36, A = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}; n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

مثال ۷۷ از میان ۱۰ نفر که بلدنا و شهرزاد هم بین آن‌ها هستند، می‌خواهیم ۸ نفر را انتخاب کنیم. احتمال این‌که بلدنا و شهرزاد در میان انتخاب شدگان باشند، چقدر است؟
حل.

$$n(S) = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = 45, \quad n(A) = \binom{10-2}{8-2} = C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = 28$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{45} = 0,62$$

مثال ۷۸ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، عددی پنج رقمی می‌نویسیم (تکرار ارقام مجاز است). احتمال این‌که رقم اول این عدد ۳ و رقم آخر آن ۵ باشد، چقدر است؟
حل.

$$n(S) = \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} = 5^5, \quad n(A) = \boxed{1} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{5} \boxed{1} = 5^7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5^7}{5^5} = \frac{1}{25}$$

نکته ۳۲ در تمام مثال‌های گفته شده بالا (احتمال کلاسیک)، فضای نمونه‌ای متناهی بود. در این قسمت به بحث بر روی فضای نمونه‌ای نامتناهی شمارش‌پذیر که به صورت $S = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ است، خواهیم پرداخت.

مطالعه آزاد

سری هندسی به مجموع جمله‌های یک دنباله هندسی گفته می‌شود.

$$\sum_{k=0}^n ar^k = ar^0 + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n.$$

اگر دو سوی تساوی را در $1-r$ ضرب کنیم به رابطه ساده‌تری می‌رسیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1-r) \sum_{k=0}^n ar^k &= (1-r)(ar^0 + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n) \\ &= ar^0 + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \\ &\quad - ar^1 - ar^2 - ar^3 - \dots - ar^n - ar^{n+1} \\ &= a - ar^{n+1} \end{aligned}$$

برای یک سری هندسی در صورتی که $r \neq 1$ باشد رابطه مجموع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \xrightarrow{\text{اگر قدرمطلق قدرنسبت سری کوچکتر از یک باشد، در حالت حدی داریم}} \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

مثال ۷۹ تاسی را آن قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار عدد ۴ مشاهده شود. احتمال این که حداقل ۳ پرتاب لازم باشد چقدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای نامتناهی ولی شمارش‌پذیر است؛ زیرا ممکن است در پرتاب اول عدد ۴ مشاهده شود، ممکن است در پرتاب دوم عدد ۴ مشاهده شود و ... بنابراین

S	در پرتاب سوم عدد ۴ مشاهده شود.	در پرتاب دوم عدد ۴ مشاهده شود.	در پرتاب اول عدد ۴ مشاهده شود.
احتمال	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

منظور از این که در پرتاب دوم عدد ۴ مشاهده شود، آن است که در پرتاب اول عدد ۴ مشاهده نشود (که برابر است با $\left(\frac{5}{6}\right)$ و در پرتاب دوم عدد ۴ مشاهده شود (که برابر است با $\frac{1}{6}$)، بنابراین احتمال آن برابر با $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)$ است. و به همین ترتیب در پرتاب سوم عدد ۴ مشاهده شود، یعنی در پرتاب‌های اول و دوم، عدد ۴ مشاهده نشود (که برابر است با $\left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)$ و در پرتاب سوم عدد ۴ مشاهده شود (که برابر است با $\frac{1}{6}$). بنابراین احتمال آن برابر با $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)$ یا $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$ است. در

نتیجه، احتمال این که حداقل ۳ پرتاب لازم باشد، چنین است:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{6} + \dots$$

که یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $r = \frac{5}{6}$ است. بنابر فرمول حد مجموع:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{25}{36}$$

مثال ۸۵ دو تیرانداز A و B به‌طور مستقل و با احتمال $\frac{1}{3}$ به‌هدف می‌زنند. تیراندازی از فرد A شروع می‌شود و تعداد

دفعات تیراندازی، به‌طور نامحدود می‌باشد. احتمال آن که فرد A قبل از فرد B به هدف بزند، چقدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای نامتناهی ولی شمارش‌پذیر است، زیرا ممکن است فرد A در اولین بار به‌هدف بزند، ممکن است در دومین بار به هدف بزند و ... بنابراین:

S	A	$A'B'A$	$A'B'A'B'A$	$\dots$
احتمال	$(\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$	$\dots$

در نتیجه، احتمال این که فرد A قبل از B به هدف برزد، چنین است:

$$\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + \dots$$

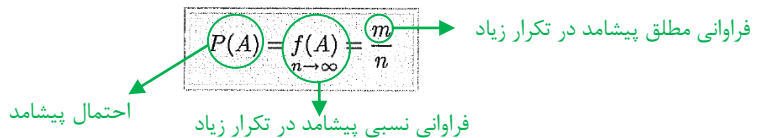
که یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $r = (\frac{1}{2})^2$ است. بنابر فرمول حد مجموع:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

۱۷-۲ محاسبه‌ی احتمال براساس تعریف آماری احتمال



اگر برآمدهای یک آزمایش تصادفی هم‌شانس نباشد، از خاصیت فراوانی نسبی پیشامد استفاده می‌شود. فراوانی نسبی پیشامد، در تکرار زیاد آزمایش‌ها به سمت عددی میل می‌کند که آن، اندازه‌ی امکان وقوع پیشامد را بیان می‌کند:



مثال ۸۱ از میان ۴۰۰ راننده در سنین ۲۰ تا ۲۴ سال که به تصادف انتخاب شده‌اند، ۱۳۶ نفر آن‌ها در طول سال گذشته تصادف داشته‌اند. اگر راننده‌ای به تصادف در این فاصله‌ی سنی انتخاب کنیم، احتمال این که در طول سال آینده تصادف داشته باشد، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{136}{400} = 0.34$$

۱۸-۲ احتمال عینی و ذهنی

فرض کنید تاسی را پرتاب می‌کنید، (احتمال ظاهر شدن عدد زوج) برایتان مهم باشد. شما از قبل احتمال ظاهر شدن عدد زوج را می‌دانید (احتمال آن $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$). این احتمال همواره ثابت است. چنین احتمالی که با قواعد خاص به دست می‌آیند و مقدار ثابتی دارند، «احتمال عینی» نامیده می‌شود. فرض کنید که یکی از تماشاگران مسابقه‌ی فوتبال ایران-ژاپن را انتخاب کرده، از او می‌پرسید: (احتمال این که تیم ایران برنده شود، چقدر است؟) و او به شما می‌گوید که: احتمال آن ۶۰ درصد است. چنین احتمالاتی که به نظر اشخاص بستگی دارد و قاعده‌ی خاصی برای تعیین آن وجود ندارد، «احتمال ذهنی» نامیده می‌شوند.



آزمایشی تصادفی را در نظر بگیرید که شامل n برآمد هم‌شانس باشد:

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

اصل اول: احتمال رخ دادن هر برآمد فضای نمونه‌ای یک عدد غیرمنفی است:

$$P(e_i) \geq 0$$

اصل دوم: مجموع احتمال‌های رخ دادن تمام برآمدهای فضای نمونه‌ای برابر با یک است:

$$P(S) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$$

اصل سوم: احتمال رخ دادن هر پیشامد مشخصی مانند A که دارای m عضو

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

باشد ($A \subset S$)، برابر است با مجموع احتمال رخ دادن برآمدهایی که پیشامد مزبور را تشکیل می‌دهند:

$$P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_m) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ بار}} = \frac{m}{n}$$

نکته ۳۳ اگر $A_1, A_2, \dots$ و $\dots$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار S باشند:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

هر دو پیشامد که نتوانند به‌طور هم زمان رخ دهند، ناسازگارند.

مثال ۸۲ تاسی ناسالم بوده به طوری که احتمال آمدن عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد است، احتمال آمدن عدد اول در یک بار پرتاب این تاس را پیدا کنید.

حل. اگر به عدد فرد شانس λ داده شود به اعداد زوج باید شانس 2λ داده شود. از طرفی:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\lambda + 2\lambda + \lambda + 2\lambda + \lambda + 2\lambda = 1; \lambda = \frac{1}{9}$$

$$E = \{2, 3, 5\}; P(E) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

مثال ۸۳ گیریم $S = \{e_1, e_r, e_r, e_r\}$ و فرض کنید P تابع احتمال روی S باشد. مطلوب است محاسبه $P(e_r)$.

اگر $P(e_1) = 2P(e_r)$ و $P(er) = P(er) = \frac{1}{4}$ حل.

$$P(e_1) + P(er) + P(er) + P(er) = 1$$

$$2P(er) + P(er) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; 3P(er) = \frac{1}{2}; P(er) = \frac{1}{6}$$

۲-۲۰ پیشامدهای مرکب

در مطالعه‌ی نظریه‌ی احتمال، روابط بین پیشامدهای مختلف یک آزمایش، نقشی اساسی دارند. در همه‌ی تعاریف زیر فرض می‌کنیم که پیشامدها به یک فضای نمونه‌ای ثابت تعلق دارند.

(۱) پیشامد $A \subseteq B$: «پیشامد A را زیرمجموعه‌ی پیشامد B » گوئیم هرگاه وقوع A مستلزم وقوع B باشد.

(۲) $A = B$: «پیشامدهای A و B را برابر» گوئیم هرگاه وقوع A و وقوع B را نتیجه دهد و برعکس.

(۳) $A \cup B$: «اجتماع پیشامدهای A و B » تنها وقتی به دست می‌آید که یکی از دو پیشامد A یا B و یا هر دو اتفاق بیفتد.

(۴) $A \cap B$: «اشتراک پیشامدهای A و B » تنها وقتی به دست می‌آید که پیشامدهای A و B هر دو اتفاق بیفتد.

(۵) پیشامد A' : «متمم پیشامد A » تنها وقتی اتفاق می‌افتد که پیشامد A اتفاق نیفتد.

(۶) پیشامد $A - B$: «تفاضل پیشامدهای A و B » تنها وقتی حاصل می‌شود که A اتفاق بیفتد، ولی B اتفاق نیفتد.

(۷) پیشامد $A \Delta B$: «تفاضل متقارن پیشامدهای A و B » تنها وقتی به دست می‌آید که تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.

۲-۲۱ پیشامدهای متمم

هرگاه متمم پیشامد A را به A' نشان دهیم، رابطه‌ی زیر بین دو پیشامد متمم برقرار است:

$$P(A) + P(A') = 1; P(A) = 1 - P(A')$$

نکته ۳۴ دو پیشامد متمم، ناسازگار نیز هستند، زیرا:

$$A \cap A' = \phi; P(A \cap A') = 0$$

نکته ۳۵ مزیت بزرگ قاعده‌ی متمم‌گیری این است که گاهی می‌تواند به اندازه‌ی قابل ملاحظه‌ای محاسبات

لازم برای حل مسأله را کاهش دهد. نکته کلیدی پیشامدهای متمم، درواقع توجه به معنای ضمنی آن است. باید

موجه باشیم که مثلاً متمم «حداقل یک دختر» عبارت از «هیچ دختر» است که با «همه پسر» معادل است.

مثال ۸۴ دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال این که حاصل ضرب عددهای رو شده کم‌تر از 3^0 باشد، چقدر است؟ حل.

A : حاصل ضرب عددهای رو شده کم‌تر از 3^0 باشد.

A' : حاصل ضرب عددهای رو شده برابر یا بیش‌تر از 3^0 باشد.

$$n(S) = 6^2 = 36, A' = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}; n(A') = 3$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$$

مثال ۸۵ از بین 1^0 پزشک که ۳ نفر آن‌ها متخصص هستند، ۳ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که در بین

این ۳ نفر حداقل یک متخصص انتخاب شود چقدر است؟

حل.

A : حداقل یک نفر از ۳ نفر، متخصص باشد.

A' : هیچ یک از ۳ نفر، متخصص نباشد.

$$n(S) = C_{1^0}^3 = \frac{1^0!}{3!1^0!} = 12^0, n(A') = C_V^3 = \frac{V!}{3!1^0!} = 3^5$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3^5}{12^0} = \frac{8^5}{12^0}$$

۲-۲۲ پیشامدهای سازگار و ناسازگار

(۱) دو پیشامد را در صورتی «ناسازگار» گویند که نتوانند در یک زمان باهم رخ دهند. اگر یکی از آن‌ها رخ دهد،

دیگری به‌طور قطع رخ نمی‌دهد. ولی امکان دارد که هیچ‌کدام از آن‌ها به‌وقوع نپیوندند.

(۲) دو پیشامد را در صورتی «سازگار» گویند که بتوانند در یک زمان باهم رخ دهند. به عبارت دیگر وقوع یک

پیشامد مستلزم عدم وقوع دیگری نیست.

مثال ۸۶ در تمرین‌های ۱ و ۲ برای هر جفت پیشامدها، معین کنید که آیا آن‌ها در یک آزمایش سازگارند یا ناسازگار؟

(۱) A : انتخاب یک دکتر جراح زن، B : انتخاب یک دکتر جراح مغز

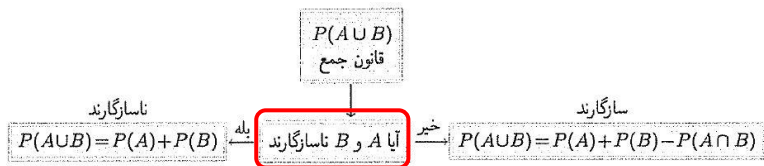
(۲) A : انتخاب یک درس اختیاری، B : انتخاب یک درس الزامی

حل.

(۱) پیشامدهای سازگار (۲) پیشامدهای ناسازگار

۲-۲۳ قانون جمع

در این بخش می‌خواهیم قاعده‌ای برای یافتن احتمال رخ دادن پیشامدهای $(A \text{ یا } B)$ پیدا کنیم. بهتر است به طریق زیر عمل کنیم:

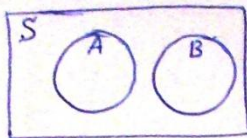


نکته ۳۶ هرگاه بگوییم وقوع پیشامدهای A یا B ، منظور $A \cup B$ است و هرگاه بگوییم وقوع پیشامدهای A و B منظور $A \cap B$ است.

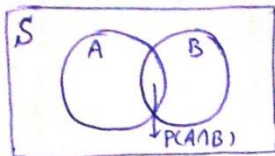
مثال ۸۷ با فرض $P(A) = ۰٫۵$ ، $P(B) = ۰٫۶$ و $P(A \cap B) = ۰٫۴$ پیدا کنید:

۱) $P(A \cup B)$

۲) $P(A' \cup B')$



درست است باز $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

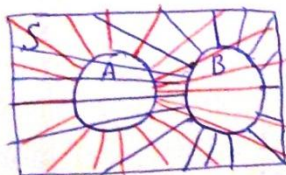


دو مجموعه سازگار

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

دلیل: چون با هم برابر $P(A)$ یا $P(B)$

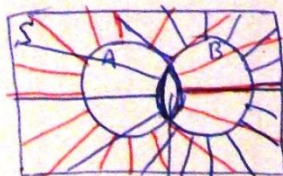
یک بار احتمال رخ دادن اشتراک A و B وارد می شود، در نتیجه در عبارت $P(A) + P(B)$ دو بار احتمال اشتراک A و B وارد شده است، بنابراین باید یک بار $P(A \cap B)$ از مجموع $P(A) + P(B)$ کم شود تا احتمال اتفاق افتادن A و B درست محاسبه شود.



$$P(A' \cup B') = 1$$

دلیل: $P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$

$$= 1 - P(A) + 1 - P(B) - (1 - P(A \cup B)) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B)) = 1$$



$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

دلیل: $P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) + 1 - P(B) - [1 - P(A \cup B)] =$

$$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B)) = 1 - P(A \cap B)$$

حل.

(۱)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$$

(۲)

$$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

مثال ۸۸ احتمال این که خانواده‌ای اتومبیل، خانه‌ی شخصی و یا هر دوی آن‌ها را داشته باشد به ترتیب 0.64 و 0.34 و 0.09 است. اگر خانواده‌ای به صورت تصادفی انتخاب شود، احتمال این که دست کم یکی از این دو را داشته باشد، چقدر است؟

حل. A : داشتن اتومبیل، B : داشتن خانه‌ی شخصی

$$P(A) = 0.64, \quad P(B) = 0.34, \quad P(A \cap B) = 0.09$$

بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.64 + 0.34 - 0.09 = 0.89$$

$A \cup B$

مثال ۸۹ از میان بازیکنان تیم‌های فوتبال a, b, c و d یک نفر را انتخاب کرده‌ایم. احتمال این که این شخص از تیم a یا b باشد، چقدر است؟

حل. A : شخص انتخاب شده از تیم a باشد، B : شخص انتخاب شده کاپتان باشد.

$$P(A) = \frac{11}{44}, \quad P(B) = \frac{4}{44}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{44}$$

بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{44} + \frac{4}{44} - \frac{1}{44} = \frac{14}{44}$$

مثال ۹۰ اگر A و B پيشامدهای ناسازگار باشند و $P(A) = 0.5$ و $P(B) = 0.2$ ، پیدا کنید:

$$۱) P(A \cup B) \quad ۲) P(A \cap B')$$

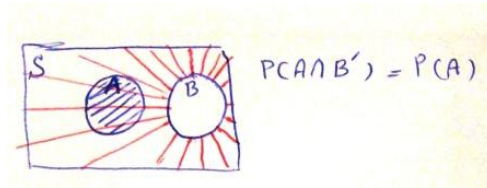
حل.

(۱)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.2 = 0.7$$

(۲)

$$A \cap B = \phi; \quad A \cap B' = A; \quad P(A \cap B') = P(A) = 0.5$$



مثال ۹۱ در یک سال جوانان واجد شرایط با انتخاب روز تولد به ارتش اعزام شدند. اگر ۳۶۶ روز تولد متفاوت روی کاغذهای جداگانه نوشته شود و آن‌ها را در ظرفی به‌طور کامل به هم بریزید، احتمال این‌که روز تولد شخص انتخاب شده در ماه تیر یا دی باشد، چقدر است؟

حل. A : متولد ماه تیر، B : متولد ماه دی

بدیهی است که A و B ناسازگارند، زیرا هیچ روزی به هر دو ماه تیر و دی متعلق نیست. بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{31}{366} + \frac{30}{366} = \frac{61}{366}$$